YTU FEN EDEBİYAT FAKULTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

YARI HALKALAR

Zülfikar Ata MARANGOZ

18025007

Danışman: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

ÖZET

Soyut cebirde halka teorinin daha genel bir hali olan yarı-halka teori önce kendi içerisinde daha sonra da halka teoriden faydalanılarak incelenmiştir.

YARI HALKALAR

Bir $\emptyset \neq R$ kümesi ve bu küme üzerinde tanımlı $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma işlemleri verilsin. Eğer

- $(R, +)$ bir değişmeli monoid (birim elemanı 0 ile gösterelim)
- $(R, .)$ bir monoid (birim elemanı 1 ile gösterelim)
- $\forall a, b, c \in R$ için $(a+b).c = a.c + b.c$
- $\forall a, b, c \in R$ için $a.(b+c) = a.b + a.c$
- $\forall a \in R$ için $a.0 = 0.a = 0$

oluyorsa bu $(R, +, .)$ yapısına bir birimli yarı halka denir. Eğer ki $(R, .)$ yapısı bir monoid değil de bir yarı grup olursa (yani birim elemanın varlığı zorunlu kılınmazsa) $(R, +, .)$ yapısına yarı halka denir.

Bu tanımdan hemen anlaşılır ki her halka aslında bir yarı halkadır. Yani yarı halka teori aslında halka teoriyi de kapsar.

Burada halka ve yarı halka tanımları arasındaki en önemli farklardan biri 0 ile çarpmadır. Halkalarda 0 ile çarpımın sonucunun 0 oluşu, toplamsal terslerin getirdiği bir sonuçtur. Fakat yarı halkalarda toplamsal terslerin varlığı kesin olmadığından 0 ile çarpmanın sonucunun 0 olacağı ayrı bir koşul olarak alınır.

R bir yarı halka olsun ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. Eğer:

1) $\forall a, b \in I$ *için* $a + b \in I$
2) $\forall r \in R$ *ve* $\forall a \in I$ *için* $r.a \in I$ *ve* $a.r \in I$

oluyorsa I'ya R'nin bir ideali denir. Bu durum kısaca $I \trianglelefteq R$ biçiminde gösterilir.

Biz bu çalışmada sağ ideal ve sol ideali ayrı ayrı incelemiyoruz.

R bir yarı halka $A \trianglelefteq R$ ve $B \trianglelefteq R$ olsun. O halde aşağıdaki kümeler de R'nin idealleridir:

1) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
2) $AB = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$

ve bu idealler için $A \subseteq A + B$ ve $AB \subseteq A$ ilişkileri geçerlidir.

R bir değişmeli yarı halka ve $P \trianglelefteq R$ öz ideal olsun. Eğer $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa bu P idealine bir asal ideal denir.

R bir değişmeli yarı halka ve $M \trianglelefteq R$ öz ideal olsun. Eğer bir $A \trianglelefteq R$ için $M \subseteq A$ iken $M = A$ veya $A = R$ oluyorsa bu M idealine bir maksimal ideal denir.

Halka teoride olduğu gibi yarı halkalarda da her maksimal ideal aynı zamanda asal idealdir.

***A*-yarı halka:** R değişmeli bir yarı halka olsun, eğer R'nin her öz idealine karşılık bu ideali kapsayan bir asal ideal mevcutsa bu yarı halkaya A-yarı halka denir.

A-yarı halka kavramı birimli değişmeli yarı halkaların genelleştirilmesidir.

Her birimli değişmeli yarı halka bir A-yarı halkadır.

R, A-yarı halka ve $I \trianglelefteq R$ bir öz ideal olsun. I idealinin radikali $\sqrt{I}$ ile gösterilir ve R'de I'yı içeren tüm asal ideallerin kesişimi olarak tanımlanır.

R, A-yarı halka ve $A, B \trianglelefteq R$ öz idealler olsun, o halde aşağıdakiler sağlanır:

1) $\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$
2) $A \subseteq B$ ise $\sqrt{A} \subseteq \sqrt{B}$
3) $A \cap B \neq \emptyset$ olmak koşuluyla $\sqrt{A \cap B} = \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$.

Yarı halkalarda toplamsal terslerin varlığı gerekmediği için yeni bir ideal türü olan k-idealler tanımlanır.

***k*-ideal:** R bir yarı halka ve $I \trianglelefteq R$ bir ideal olsun. Eğer $a \in I$ ve $b \in R$ için $a + b \in I$ iken $b \in I$ oluyorsa I'ya bir k-ideal denir.

Halka Genişlemesi: $(S, +, .)$ cebirsel yapısı bir yarı halka olsun. Eğer bir $S \subseteq R$ kümesi için $(R, +, .)$ cebirsel yapısı bir halka oluyorsa bu R halkasına, S yarı halkasının bir halka genişlemesi denir.

Örneğin $\mathbb{Z}$ halkası $\mathbb{N}_0$ yarı halkasının bir halka genişlemesidir.

Bu çalışmada yarı halkaları, halka genişlemelerini kullanarak inceliyoruz.

S bir yarı halka ve R onun bir halka genişlemesi ve $I \trianglelefteq R$ bir ideal olsun. $I \cap S \trianglelefteq S$ bir idealdir ve bu ideal k-idealdir.

S bir yarı halka ve R onun birimli değişmeli bir halka genişlemesi olsun. $P \trianglelefteq R$ asal ideal ise $P \cap S \trianglelefteq S$ bir asal idealdir.

S bir yarı halka ve R onun birimli değişmeli bir halka genişlemesi olsun. R'nin, $I \trianglelefteq R$ ideali ve S'nin $\sqrt{I} \cap S \trianglelefteq S$ ve $\sqrt{I \cap S} \trianglelefteq S$ idealleri için $\sqrt{I} \cap S = \sqrt{I \cap S}$ olur.

S bir yarı halka ve R onun birimli değişmeli bir halka genişlemesi olsun. Eğer $P \trianglelefteq R$ bir asalımsı ideal ise $P \cap S \trianglelefteq S$ de bir asalımsı idealdir.

S bir yarı halka ve R onun birimli değişmeli bir halka genişlemesi iken $M \trianglelefteq R$ idealinin maksimal olması $M \cap S$ idealinin maksimal olmasını gerektirmez. Örneğin $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ için $(2) \trianglelefteq \mathbb{Z}$ maksimaldir fakat $(2) \cap \mathbb{N}_0 \trianglelefteq \mathbb{N}_0$ maksimal değildir çünkü $(2) \cap \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{N}_0 \backslash \{1\} \subsetneq \mathbb{N}_0$ dir.

S bir yarı halka ve R onun birimli değişmeli bir halka genişlemesi olsun. Eğer bir $I \trianglelefteq S$ ideali k-ideal değil ise $I = J \cap S$ olacak şekilde bir $J \trianglelefteq R$ bulunamaz. Örneğin $\mathbb{N}_0$ yarı halkasında $I = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid 3 < x\} \cup \{0\}$ ideali k-ideal olmadığından her $J \trianglelefteq \mathbb{Z}$ ideali için $I \neq J \cap \mathbb{N}_0$ olur.

$\mathbb{N}_0$ yarı halkasında $a \in \mathbb{N}_0$ ile üretilen ideali $< a > \trianglelefteq \mathbb{N}_0$ ile gösterelim. O halde $(a) \trianglelefteq \mathbb{Z}$ olmak üzere $< a > = (a) \cap \mathbb{N}_0$ olur.

KAYNAKÇA

[1] Allen, Kim, Neggers, P. J., H. S., J., "Ideal Theory in Commutative A-semirings", KYUNGPOOK Math. J., 46, 261-271, 2006.

[2] Sen, Adhikari, M. K., M. R. ," ON k-IDEALS OF SEMIRINGS", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 15, 347-350, 1992.

[3] Chaudhari, Bonde, J. N., D. R., " Ideal Theory in Quotient Semirings", Thai Journal of Mathematics , 12, 95-101, 2014.